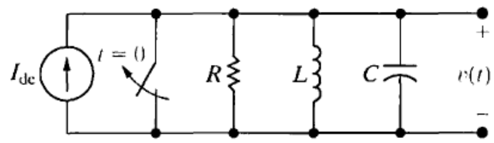
مدارهای الکتریکی

درس (18)

- استفاده از تبدیل لاپلاس برای حل مدار



$$\frac{v(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t x(t')dt' + C\frac{dv(t)}{dt} = I_{dc}u(t)$$

$$\frac{V(s)}{R}+\frac{1}{L}\frac{V(s)}{s} + C[sV(s)-v(0^-)] = I_{dc}(\frac{1}{s})$$

$$v(0^-) = 0 \qquad V(s) = \frac{I_{dc}/C}{s^2+\left(\frac{1}{RC}\right)s+(\frac{1}{LC})}$$

با عکس تبدیل لاپلاس، $v(t)$ بدست می‌آید

- **بدست‌آوردن عکس تبدیل لاپلاس:** بسط به کسرهای جزئی $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$
  - مرتبه $D(s)$ بزرگتر از مرتبه $N(s)$
  - مرتبه $D(s)$ کوچکتر از مرتبه $N(s)$
- **مرتبه $D(s)$ بزرگتر از مرتبه $N(s)$**
  - قطب‌ها حقیقی و مستقل

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$F(s) = \frac{k_1}{s+p_1}+\frac{k_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s+p_n}$$

$$k_i = (s+p_i)F(s)\,|_{s=-p_i}$$

$$\boxed{f(t) = (k_1e^{-p_1t}+k_2e^{-p_2t}+\cdots+k_ne^{-p_nt})\,u(t)}$$

12.3 Find $f(t)$ if

$$F(s) = \frac{6s^2+26s+26}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Answer: $f(t) = (3e^{-t}+2e^{-2t}+e^{-3t})u(t).$

12.4 Find $f(t)$ if

$$F(s) = \frac{7s^2+63s+134}{(s+3)(s+4)(s+5)}.$$

Answer: $f(t) = (4e^{-3t}+6e^{-4t}-3e^{-5t})u(t).$

o قطب‌ها مختلط و مستقل

12.5 Find $f(t)$ if

$$F(s) = \frac{10(s^2 + 119)}{(s + 5)(s^2 + 10s + 169)}.$$

Answer: $f(t) = (10e^{-5t} - 8.33e^{-5t} \sin 12t)u(t).$

o قطب‌ها حقیقی و تکراری

$$F(s) = \frac{k_n}{(s+p)^n} + \frac{k_{n-1}}{(s+p)^{n-1}} + \cdots + \frac{k_2}{(s+p)^2} + \frac{k_1}{s+p} + F_1(s)$$

$$k_n = (s+p)^n F(s)\,|_{s=-p}$$

$$k_{n-m} = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{ds^m}[(s+p)^n F(s)]\,|_{s=-p}$$

$$\boxed{f(t) = \left(k_1 e^{-pt} + k_2 t e^{-pt} + \frac{k_3}{2!} t^2 e^{-pt} + \cdots + \frac{k_n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-pt}\right) u(t) + f_1(t)}$$

12.6 Find $f(t)$ if

$$F(s) = \frac{(4s^2 + 7s + 1)}{s(s + 1)^2}.$$

Answer: $f(t) = (1 + 2te^{-t} + 3e^{-t})u(t).$

o قطب‌ها مختلط و تکراری

12.7 Find $f(t)$ if

$$F(s) = \frac{40}{(s^2 + 4s + 5)^2}.$$

Answer: $f(t) = (-20te^{-2t} \cos t + 20e^{-2t} \sin t)u(t).$

TABLE 12.3 Four Useful Transform Pairs

Pair Number	Nature of Roots	$F(s)$	$f(t)$
1	Distinct real	$\frac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
2	Repeated real	$\frac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
3	Distinct complex	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\|K\|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$
4	Repeated complex	$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\|K\|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$

Note: In pairs 1 and 2, K is a real quantity, whereas in pairs 3 and 4, K is the complex quantity $|K|\angle\theta$.

- **مرتبه $D(s)$ کوچکتر از مرتبه $N(s)$**

12.8 Find $f(t)$ if

$$F(s)=\frac{(5s^2+29s+32)}{(s+2)(s+4)}.$$

Answer: $f(t)=5\delta(t)-(3e^{-2t}-2e^{-4t})u(t)$.

12.9 Find $f(t)$ if

$$F(s)=\frac{(2s^3+8s^2+2s-4)}{(s^2+5s+4)}.$$

Answer: $f(t)=2\frac{d\delta(t)}{dt}-2\delta(t)+4e^{-4t}u(t)$.

- **تئوری مقدار اولیه و نهایی**

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

- ارتباط تبدیل لاپلاس ولتاژ و جریان المان‌ها
  - مقاومت

$$v(t)=R\,i(t)$$
$$V(s)=R\,I(s)$$
$$Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=R$$

  - سلف

$$v(t)=L\,\frac{di(t)}{dt}$$
$$V(s)=L(s\,I(s)-i(0^-))$$
$$Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=sL$$

  - خازن

$$i(t)=C\,\frac{dv(t)}{dt}$$
$$I(s)=C(s\,V(s)-v(0^-))$$
$$Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=\frac{1}{sL}$$