




آنالیز فوریه و پردازش سیگنال

سیگنال ها و سیستم ها

ممدرضا پوررضا




منابع و نحوه ارزیابی

2

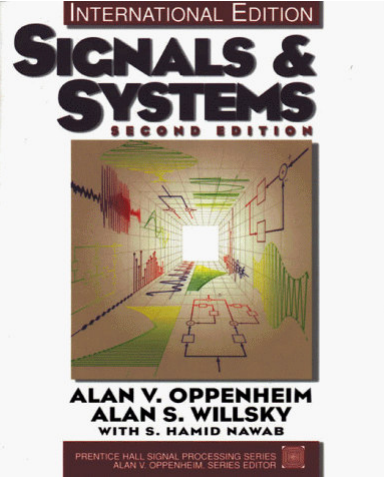
- A.V. Oppenheim, A.S. Willsky; "Signals and Systems"; Second Edition; Prentice Hall
- Gonzalez & Woods, "Digital Image Processing", 3rd Edition, 2008


H.R. POURREZA



منابع و نحوه ارزیابی

3





H.R. Pourreza




منابع و نحوه ارزیابی

4








5

ارزیابی

پایان ترم <input type="checkbox"/>	۴۰٪
تمرین <input type="checkbox"/>	۲۵٪
پروژه <input type="checkbox"/>	۳۵٪

در تهیه اسلایدهای این درس از اسلایدهای آقای پروفیسور Oppenheim و پروفیسور A.S. Willsky استفاده شده است.
H.R. POURREZA




موضوعات این فصل

6

- سیگنال‌ها
- سیستم‌ها
- مثال‌هایی از سیستم‌ها
- خصوصیات سیستم‌ها به همراه چند مثال
 - علیت
 - فطی بودن
 - تغییرناپذیری با زمان
 - حافظه‌دار بودن
 - پایداری

H.R. POURREZA

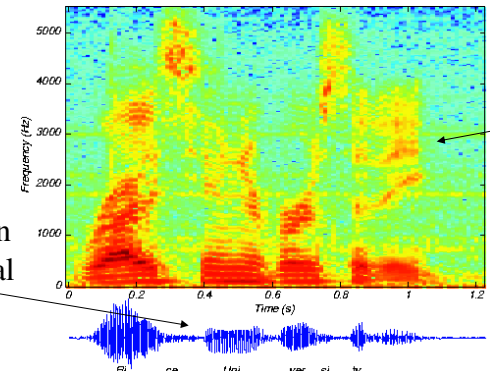

سینال

7

□ سیگنال‌ها توابعی از متغیرهای مستقل هستند که کامل اطلاعاتند. به عنوان مثال:

- سیگنال‌های الکتریکی: ولتاژها و جریان‌ها در مدارهای الکتریکی
- سیگنال‌های آکوستیکی: سیگنال‌های صوتی و گفتار (آنالوگ و دیجیتال)

Time-domain
Speech signal



Spectrogram


سینال

8

□ سیگنال‌های تصویری: تغییرات (روشنایی در یک تصویر (تصویر CT)



□ سیگنال‌های بیولوژیکی: رشته‌ای از پایه‌ها در یک ژن


DNA



Its signal representation

```

1501 CACAGTCTCTTGAATAAATCTTAGATGATTCAGTTCATCTCAAGATTCCTCATCTGAA 1560
1561 AATTGGAAATTTGCTCTAAGTAAATTTATTAGCTTTTAAATACATACCAGTATCTCAGA 1620
1621 TTTTGTCTTTCTCTCTGCTGCTTTTGGAAACGAGGATTTTGGATTTCTAAACTTCTC 1680
1681 TTCAATCTTGATTTGTTTTTGGAAACGAGGATTTGAGGCTGATGTTTTTCTC 1740
1741 GATGACTTTGTGATTTTCTCTTATCCAGTCTTCAATCCAGCTTTATATGCTGAA 1800
1801 AGTCAGCATTTTTCAGAAAGAGCGGATTTTAAATTCGGGAGAACTCCACTGAT 1860
1861 TGTGATGTGCAAAATCCGCTAAATGATTTTCTCTAGCTGGGAAAGCAATTTGAGAG 1920
1921 ATGTAGAAAGGCGGCAATTAGAMTGTGACTGGGAGAAACTACCGTTAAC 1980
1981 GCGAATTTGACTCCGACAGATCTGTCTCAGATTCGGAGTCAATTTTCAAGTTAT 2040
2041 TTGTTTTCAGCGSTTGTTTTATTAAGATTTTAAATTTTAAACAAATGTGCAATAG 2100
2101 TCTATTAACCTCTGAGATATTGAAGAACTTTCCCGTTTTAAATATTTGTGTAT 2160
2161 COTGGAGATCCGGGAAATGTTTTGCTGTTTCCGTAATAATTCCTATTCTTTTAT 2220
2221 TGCTTGCAATTTGATTCATTTAGAGTTTCCACTTCGAAACGATGGAGCTCTC 2280
2281 TTATTAGATGTCCCAAGGATGAGTCCGGAAGCAATGCTGAAAGCGCGGTACGCG 2340
2341 CATGAGATTTGGCAATACGAGATGGAAAGGAGCTTACAGGAGATAATGGATTCG 2400
2401 AACCTCAATTTTCACTACTGTTGATCATACATATTTACGAGAGTGTCCAGGCA 2460
                
```




متغیرهای مستقل

9

- برای سیگنال الکتریکی مقدار ولتاژ یا جریان با زمان تغییر می‌کند، بنابراین زمان متغیر مستقل و ولتاژ و جریان متغیرهای وابسته هستند
- متغیر مستقل می‌تواند پیوسته باشد
 - مسیر حرکت (Trajectory) یک سفینه فضایی
 - دانسیته جرم در یک برش از مغز
- متغیر مستقل می‌تواند گسسته باشد
 - رشته DNA
 - پیکسل‌های یک تصویر
- متغیر مستقل می‌تواند یک‌بعدی (1D)، دوبعدی (2D) و ... N بعدی باشد

H.R. POURREZA



متغیرهای مستقل

10

- متغیر مستقل را در سیگنال‌های مشخص کنید

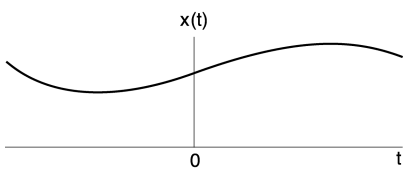
۱- گفتار	۲- تصویر CT	۳- رشته DNA
۱- زمان	۲- مکان	۳- مکان در ملکول DNA
- در این درس: عمده تمرکز بر روی سیگنال‌های یک‌بعدی است که متغیر مستقل آن زمان است و بخشی نیز به سیگنال‌های دوبعدی اختصاص خواهد یافت
 - سیگنال پیوسته در زمان (Continuous-Time:CT)
که در آن t یک مقدار پیوسته است
 - سیگنال گسسته در زمان (Discrete-Time:DT)
که در آن n یک مقدار صمیع است

H.R. POURREZA

MV Lab

سیگنال های پیوسته در زمان

11



□ اکثر سیگنال‌ها در دنیای فیزیکی، سیگنال‌های پیوسته در زمان هستند، مثل ولتاژ و جریان، فشار، دما، سرعت و ...

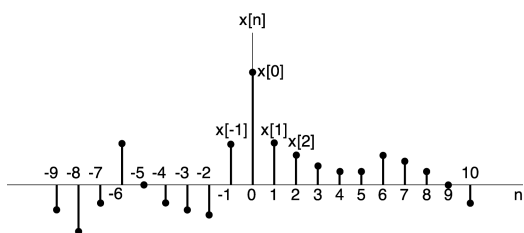
H.R. POURREZA

MV Lab

سیگنال های گسسته در زمان

12

□ $x[n]$ که در آن n یک مقدار صحیح است، زمان بصورت گسسته تغییر می‌کند



□ مثال‌هایی از سیگنال‌های طبیعی گسسته در زمان:

- رشته‌های DNA
- جمعیت نسل n ام از یک گونهی خاص

H.R. POURREZA

سیگنال های گسسته در زمان

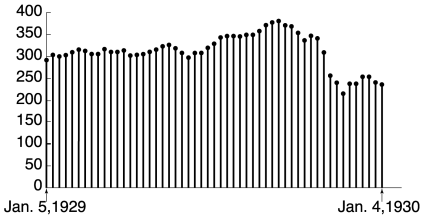

MV Lab

13

□ فیلی از سیگنال های سافت دست بشر از نوع گسسته در زمان است

مثال ۱: تصویر دیجیتال

مثال ۲: متوسط ارزش هفتگی سهام در بورس

□ اما چرا سیگنال گسسته در زمان؟

این سیگنال ها می توانند توسط کامپیوترهای **دیجیتال** و پردازنده های سیگنال **دیجیتالی** (DSPs) مورد پردازش قرار گیرند.

H.R. POURREZA

سیگنال های گسسته در زمان

MV Lab

14

□ ارتباط سیگنال دیجیتال و سیگنال گسسته در زمان


$g(t)$

↓ گسسته سازی

$g(n)$

چندین سازی → $f(n)$ سیگنال دیجیتالی

H.R. POURREZA



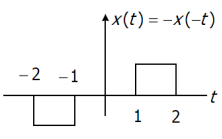
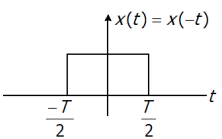
برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

15

□ سیگنال زوج/فرد

□ سیگنال زوج: $x(t) = x(-t)$, $x[n] = x[-n]$

□ سیگنال فرد: $x(t) = -x(-t)$, $x[n] = -x[-n]$


□ هر سیگنال می‌تواند بصورت مجموع یک سیگنال زوج و فرد نوشته شود

$$x(t) = \text{Even}(x(t)) + \text{Odd}(x(t))$$

$$\text{Even}(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$\text{Odd}(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

H.R. POURREZA



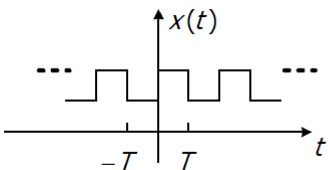
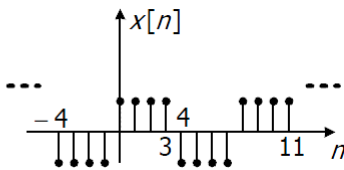
برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

16


□ سیگنال متناوب

$$x(t) = x(t + T) = x(t + kT) \quad \omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x[n] = x[n + N] = x[n + kN] \quad \Omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} \quad k \in \mathbb{Z}$$

H.R. POURREZA




برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

17

□ انرژی و توان

- در سیگنال پیوسته در زمان $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$
- در سیگنال گسسته در زمان $\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]^2$
- سیگنال با انرژی محدود/نامحدود
- انرژی متوسط

H.R. POURREZA




برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

18

□ عملیات روی متغیر وابسته

$y[n] = Ax[n]$	$y(t) = Ax(t)$
$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$
$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$	$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$
$y[n] = x[n] - x[n-1]$	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$

H.R. POURREZA

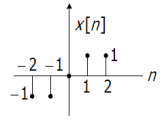


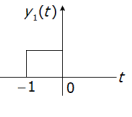
برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

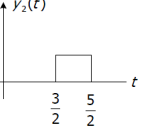
19

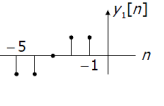
□ عملیات روی متغیر مستقل

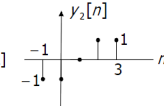
□ شیفیت

$y[n] = x[n - n_0]$



$y_1(t) = x(t + \frac{1}{2})$


$y_2(t) = x(t - 2)$


$y_1[n] = x[n + 3]$


$y_2[n] = x[n - 1]$


H.R. POURREZA

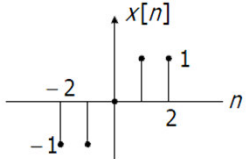


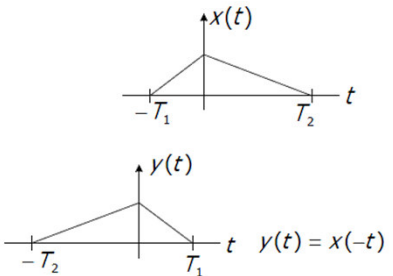
برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

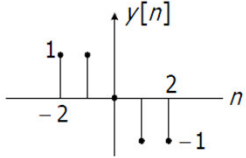
20

□ عملیات روی متغیر مستقل (ادامه)

□ وارون سازی

$y[n] = x[-n]$


$y(t) = x(-t)$


$y_1[n] = x[-n]$


H.R. POURREZA

برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

MV Lab

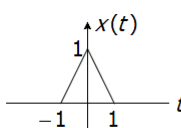
21

□ عملیات روی متغیر مستقل (ادامه)

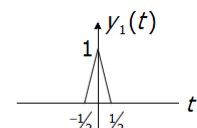
□ تغییر مقیاس زمانی

$y[n] = x[kn]$

$y(t) = x(at)$



$x(t)$



$y_1(t) = x(2t)$

H.R. POURREZA

برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

MV Lab

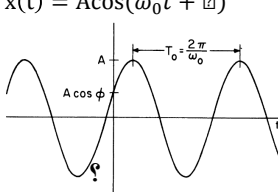
22

□ برخی سیگنال های مهم

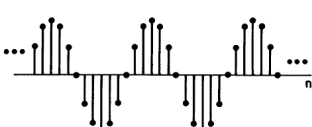
□ سیگنال سینوسی

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$




شیفت زمانی \Leftrightarrow تغییر فاز



شیفت زمانی \Leftarrow تغییر فاز
تغییر فاز \Leftarrow شیفت زمانی

H.R. POURREZA

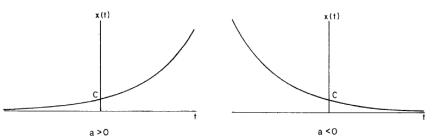


برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

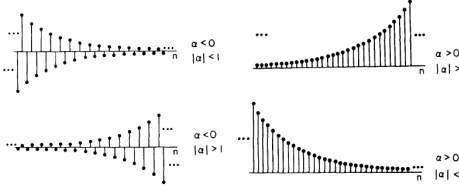
23

□ برخی سیگنال های مهم

□ سیگنال نمایی مقیقی (C و a مقادیر مقیقی هستند)

$$x(t) = Ce^{at}$$



شیفت زمانی ⇔ تغییر فاز

$$x[n] = Ce^{\beta n} = Ca^n$$


□ سیگنال نمایی مطلق (C و a مقادیر مطلقا هستند)

$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ رابطه اولر:

H.R. POURREZA

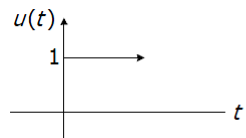


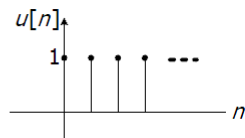
برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

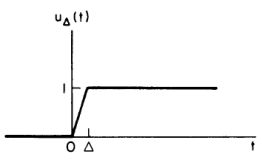
24

□ توابع ویژه

□ پله واحد







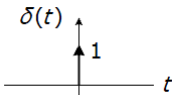
$u(t) = u_{\Delta}(t)$ as $\Delta \rightarrow 0$

H.R. POURREZA

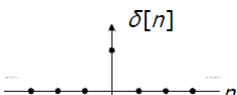
برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

□ توابع ویژه

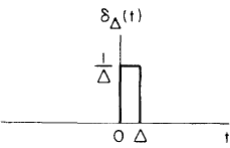
□ ضربه واحد (ایمپالس واحد)/نمونه واحد



$\delta(t)$



$\delta[n]$



$\delta_{\Delta}(t)$

سطح زیر منحنی = 1

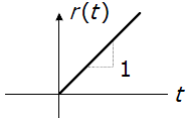
H.R. POURREZA

برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

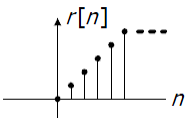
□ توابع ویژه (ادامه)

□ شیب واحد

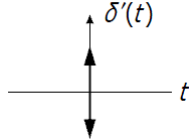
□ دوبلت واحد



$r(t)$



$r[n]$



$\delta'(t)$

H.R. POURREZA

MV Lab

برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

27

□ توابع ویژه (ادامه)
□ ارتباط بین توابع

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

H.R. POURREZA

MV Lab

برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

28

□ توابع ویژه (ادامه)
□ ارتباط بین توابع

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

H.R. POURREZA

برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

□ توابع ویژه (ادامه)
□ ارتباط بین توابع

29

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

The figure shows four discrete-time plots. The first plot shows the unit impulse function $\delta[n]$ with a single stem at $n=0$. The second plot shows $\delta[n-1]$ with a stem at $n=1$. The third plot shows $\delta[n-2]$ with a stem at $n=2$. The fourth plot shows the sum $\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots$ with stems at $n=0, 1, 2, \dots$.

برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

□ توابع ویژه (ادامه)
□ ارتباط بین توابع

30

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt}$$

$$\delta(t) = \delta_{\Delta}(t) \quad \text{as } \Delta \rightarrow 0$$

H.R. POURREZA

برخی مفاهیم در رابطه با سیگنال ها

□ توابع ویژه (ادامه)
□ ارتباط بین توابع

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Area of integration

H.R. POURREZA

سیستم ها

□ در اکثر بخش‌ها، نگاه ما به سیستم‌ها به شکل ورودی-خروجی خواهد بود:
با اعمال یک سیگنال به یک سیستم، سیستم به این ورودی پاسخ می‌دهد.
این پاسخ به شکل یک یا چند سیگنال (رایه) می‌شود.

$x(t) \longrightarrow \text{CT System} \longrightarrow y(t)$

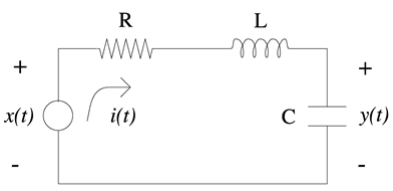
$x[n] \longrightarrow \text{DT System} \longrightarrow y[n]$

H.R. POURREZA

MV Lab

مثالی از سیستم‌ها

33



یک مدار RLC □

سیگنال ورودی چیست؟ □
 $x(t)$ (the D.C. source) □

سیگنال خروجی چیست؟ □
 $y(t)$ (the signal across capacitor) □

سیستم چیست؟ □
 کل شبکه RLC □

H.R. POURREZA

MV Lab

مثالی از سیستم‌ها

34

دینامیک یک هواپیما یا پرنده □
 الگوریتم آنالیز فاکتورهای مالی و اقتصادی برای پیش‌بینی قیمت سهام □
 الگوریتم آشکارساز لبه در تصاویر پزشکی □

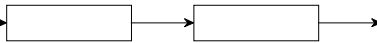
در مثال‌های فوق ورودی و خروجی هر سیستم چیست؟ □

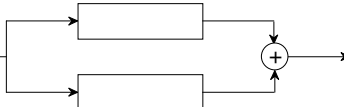
H.R. POURREZA

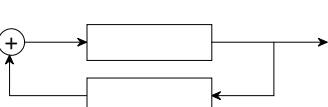
اتصال سیستم‌ها

35

□ یک موضوع مهم، اتصال سیستم‌ها است
 □ یک سیستم پیچیده را می‌توان با اتصال تعدادی سیستم ساده ساخت
 □ برای بهبود پاسخ یک سیستم
 □ دیاگرام جریان سیگنال (بلوک دیاگرام)

Cascade 

Parallel 

Feedback 

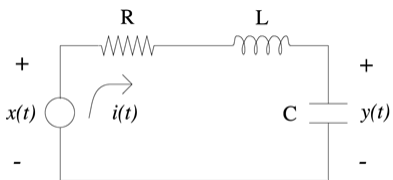
H.R. POURREZA

مثال بلنی از سیستم‌ها

36

$x(t) \rightarrow \text{CT System} \rightarrow y(t)$ $x[n] \rightarrow \text{DT System} \rightarrow y[n]$

□ مثال ۱: مدار RLC



$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

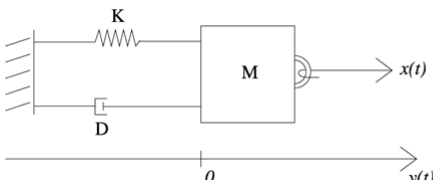
$$\Downarrow$$

$$LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

H.R. POURREZA

مثال ۲: سیستم مکانیکی

□ مثال ۲: سیستم مکانیکی



$x(t)$ - applied force
 K - spring constant
 D - damping constant
 $y(t)$ - displacement from rest

□ بالانس نیرو

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - Ky(t) - D \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + D \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

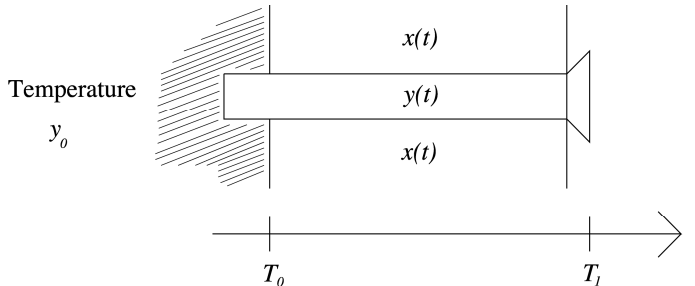
□ مشاهدات: سیستم‌های فیزیکی بسیاری می‌توانند به شکل فوق و بصورت ریاضی مدل شوند.

H.R. POURREZA

مثال ۳: سیستم حرارتی

□ مثال ۳: سیستم حرارتی

صفحه فنک کننده در حالت پایدار




$x(t)$
 $y(t)$
 $x(t)$

Temperature
 y_0

T_0 T_1

t = distance along rod
 $y(t)$ = Fin temperature as function of position
 $x(t)$ = Surrounding temperature along the fin



مثال پابی از سیستم ها

39

ادامه مثال ۳: □

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = k[y(t) - x(t)]$$


$$y(T_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dt}(T_1) = 0$$

مشاهدات: □

- متغیر مستقل می‌تواند مقداری بجز زمان باشد، مثلا مکان
- در چنین سیستم‌هایی ممکن است بجای حالت اولیه، شرایط مرزی داشته باشیم

H.R. POURREZA



مثال پابی از سیستم ها

40

مثال ۴: یک آشکارساز لبه ساده □

$$y[n] = x[n+1] - 2x[n] + x[n-1]$$

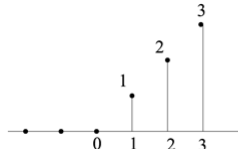

$$= \{x[n+1] - x[n]\} - \{x[n] - x[n-1]\}$$

$$= \text{“Second difference”}$$

این سیستم تغییر در تغییرات سیگنال را آشکار می‌کند

(a) $x[n] = n \Rightarrow y[n] = 0$

(b) $x[n] = nu[n] \Rightarrow y[n]$




مثال هایی از سیستم ها

41

مشاهدات:

- تعدادی زیادی از سیستم‌ها (نه همه) با استفاده از معادلات دیفرانسیل و یا معادلات تفاضلی بیان می‌شوند.
- چنین معادلاتی، بالذاته، رفتار ورودی/فروچی سیستم را کاملاً مشخص نمی‌کنند، بلکه نیاز به حالات کمکی (حالات اولیه، شرایط مرزی)
- در برقی سیستم‌ها، متخیر مستقل طبیعی زمان است و سیستم‌ها علی هستند، اما این مساله همیشه صادق نیست
- خیلی از سیستم‌های فیزیکی مختلف می‌توانند به کمک روابط ریاضی مشابهی بیان شوند

H.R. POURREZA



خصوصیات سیستم ها


42

□ علیت، فطی بودن، تغییرناپذیری با زمان و ...

چرا؟

- ملزومات عملی/فیزیکی مهم
- این خصوصیات سافتار و بینشی را فراهم می‌کند که بتوانیم سیستم‌ها را عمیق‌تر آنالیز و درک کنیم

H.R. POURREZA




خصوصیات سیستم‌ها - علیت (Causality)

43

- یک سیستم **علی است** اگر فرومی نتواند آینده‌ی ورودی را پیش‌بینی کند. یعنی اگر فرومی در هر لحظه تنها وابسته به مقدار ورودی تا آن زمان باشد
- همه سیستم‌های بلادرنگ فیزیکی **علی** هستند، زیرا زمان تنها به جلو می‌رود. اثر هر واقعه را بعد از وقوع می‌توان دید (تصور کنید که سیستمی داشته باشید که وابسته به قیمت سهام روز بعد باشد)
- علیت به سیگنال‌های spatially یا متخیر مکان اعمال نمی‌شود (می‌توانیم به چپ و راست و بالا پایین حرکت کنیم).
- علیت به سیستم‌هایی که سیگنال‌های ضبط شده را پردازش می‌کنند اعمال **نمی‌شود** (رقابت ورزشی ضبط شده در مقابل پفش زنده).

H.R. POURREZA




خصوصیات سیستم‌ها - علیت (Causality)

44

□ از نظر ریاضی (در سیگنال CT): یک سیستم $x(t) \rightarrow y(t)$ علی است اگر:

when	$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$	$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$
and	$x_1(t) = x_2(t)$	for all $t \leq t_0$
Then	$y_1(t) = y_2(t)$	for all $t \leq t_0$

H.R. POURREZA



خصوصیات سیستم‌ها - علیت (Causality)

45

□ کدام سیستم علی و کدام غیرعلی است


□ $y(t) = x^2(t - 1)$ $Y(5)$ وابسته به $x(4)$ است -- سیستم علی است

□ $y(t) = x(t + 1)$ $y, Y(5) = x(6)$ وابسته به آینده است -- سیستم غیرعلی است

□ $y[n] = x[-n]$ $Y[5] = x[-5]$ مشکلی ندارد، اما $y, Y[-5] = x[5]$ وابسته به آینده است -- سیستم غیرعلی است

□ $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n - 1]$ $Y[5]$ وابسته به $x[4]$ است -- سیستم علی است

H.R. POURREZA



خصوصیات سیستم‌ها - تغییرناپذیری با زمان (Time-Invariance)

46

□ در یک تعریف عامیانه، یک سیستم تغییرناپذیر با زمان (Time-invariant (TI) است اگر رفتار سیستم وابسته به این نباشد که الان چه زمانی است


□ از نظر ریاضی (برای یک سیستم DT): یک سیستم $x[n] \rightarrow y[n]$ یک سیستم TI است اگر برای هر ورودی $x[n]$ و هر شیفت زمانی n_0 .

If $x[n] \rightarrow y[n]$
then $x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0]$.

□ بطور مشابه برای یک سیستم CT و تغییرناپذیر با زمان

If $x(t) \rightarrow y(t)$
then $x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$.

H.R. POURREZA



خصوصیات سیستم‌ها - تغییرناپذیری با زمان (Time-Invariance)

47

□ کدام سیستم تغییرناپذیر با زمان و کدام تغییرناپذیر با زمان است؟


$$y(t) = x^2(t + 1)$$

TI

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n - 1]$$

Time-varying (NOT time-invariant)

H.R. POURREZA



خصوصیات سیستم‌ها - تغییرناپذیری با زمان (Time-Invariance)

48

□ آنچه که استنباط می‌شود

□ اگر ورودی به یک سیستم TI پررودیک باشد، خروجی نیز پررودیک و با همان پررود فواید بود

اثبات

Suppose $x(t + T) = x(t)$
and $x(t) \rightarrow y(t)$

Then by TI

$$x(t + T) \rightarrow y(t + T).$$

↑ ↑

These are the So these must be the
same input! same output,
i.e., $y(t) = y(t + T)$.


H.R. POURREZA

 **خصوصیات سیستم‌ها - سیستم‌های خطی و غیرخطی (Linear and Nonlinear)**

49

- فیلی از سیستم‌ها غیرخطی هستند. برای مثال: فیلی از المان‌های الکتریکی (مثل دیود)، دینامیک هواپیما، مدل‌های اقتصادی و ...
- با این وجود تمرکز ما بر روی سیستم‌های خطی است
- چرا؟
- مدل‌های خطی بیان دقیقی از رفتار فیلی از سیستم‌ها ارائه می‌کنند (مثل مقاومت‌ها و فازن‌های خطی)
- مدل‌ها می‌توانند در حالت سیگنال کوچک و در اطراف نقطه‌ی کار خطی شوند
- آنالیز سیستم‌های خطی آسان بوده و ابزار قدرتمندی را در اختیار ما قرار می‌دهند

H.R. POURREZA

 **خصوصیات سیستم‌ها - سیستم‌های خطی و غیرخطی (Linear and Nonlinear)**

50

- **خطی بودن**
- یک سیستم (CT) خطی است اگر دارای خاصیت جمع آثار (Superposition) باشد:


If $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ and $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$
 then $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$

- **چند مثال**
- $y[n] = x^2[n]$ Nonlinear, TI, Causal
- $y(t) = x(2t)$ Linear, not TI, Noncausal

آیا می‌توانید سیستم‌هایی با ترکیبات دیگر مثال بزنید؟

- **مثلا:** $y[n]=x[n+1]$ Linear, TI, Noncausal
- $y[n]=nx[n]$ Linear, not TI, Causal یا

H.R. POURREZA


 خصوصیات سیستم‌ها - سیستم‌های خطی و غیرخطی (Linear and Nonlinear)

51

□ خواص سیستم‌های فطی
 □ جمع آثار


If $x_k[n] \rightarrow y_k[n]$

Then $\sum_k a_k x_k[n] \rightarrow \sum_k a_k y_k[n]$

□ برای سیستم‌های فطی، ورودی صفر ← خروجی صفر
 □ اثبات:

"Proof" $0 = 0 \cdot x[n] \rightarrow 0 \cdot y[n] = 0$

H.R. POURREZA


 خصوصیات سیستم‌ها - سیستم‌های خطی و غیرخطی (Linear and Nonlinear)

52

□ ادامه خواص سیستم‌های فطی
 □ یک سیستم فطی علی است اگر و فقط اگر خاصیت initial rest را برآورده کند:
 □ اثبات

$x(t) = 0 \text{ for } t \leq t_0 \rightarrow y(t) = 0 \text{ for } t \leq t_0 (*)$.

۱- فرض کنید سیستم علی است. نشان دهید که (*) برقرار است
 ۲- فرض کنید که (*) برقرار است. نشان دهید که سیستم علی است.

H.R. POURREZA

MV Lab

خصوصیات سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان

53

□ سیستم های فطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI)

- تمرکز بخش اعظم این درس
- اهمیت کاربردی
- وجود ابزار قوی برای سیستم های LTI

□ یک واقعیت پایه ای: اگر پاسخ یک سیستم LTI به برقی ورودی ها را بدانیم، پاسخ سیستم به فیلی از ورودی های دیگر برایمان معلوم خواهد بود

H.R. POURREZA

MV Lab

خصوصیات سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان

54


□ مثال: یک سیستم DT و LTI

$x_1[n]$

$x_2[n]$

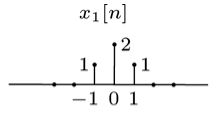
$y_1[n]$

H.R. POURREZA

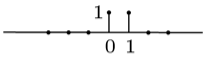

 خصوصیات سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان

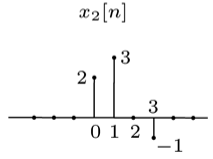
55

□ مثال: یک سیستم DT و LTI

$x_1[n]$


\longrightarrow

$y_1[n]$


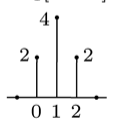
$x_2[n]$


\Downarrow

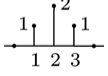
$2x_1[n-1]$

$x_1[n-2]$


$=$



$-$

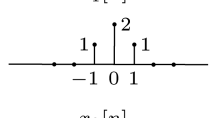


H.R. POURREZA

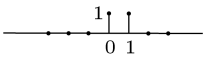

 خصوصیات سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان

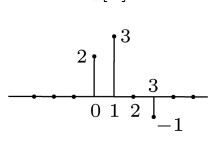
56

□ مثال: یک سیستم DT و LTI

$x_1[n]$


\longrightarrow

$y_1[n]$


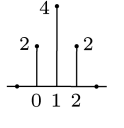
$x_2[n]$


\Downarrow

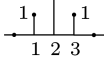
$2x_1[n-1]$

$x_1[n-2]$

$=$



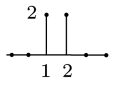
$-$



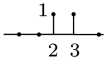
$=$


$2y_1[n-1]$

$y_1[n-2]$



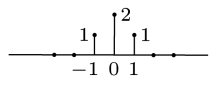
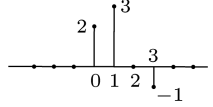
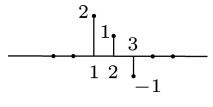
$-$

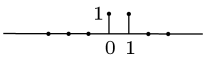
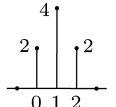

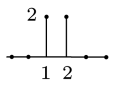
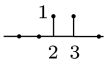



 خصوصیات سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان


57

□ مثال: یک سیستم DT و LTI

$x_1[n]$

 $x_2[n]$

 $y_2[n]$


\longrightarrow
 $y_1[n]$

 \Downarrow
 $2x_1[n-1]$ $x_1[n-2]$
 
 \Downarrow
 $2y_1[n-1]$ $y_1[n-2]$
 

\Downarrow
 $x_2[n]$ $=$ $2x_1[n-1]$ $-$ $x_1[n-2]$
 \Downarrow
 $y_2[n]$ $=$ $2y_1[n-1]$ $-$ $y_1[n-2]$


 خصوصیات سیستم های حافظه دار بودن

58


□ سیستمی بدون حافظه است که فروجهی آن در هر لحظه وابسته به ورودی در همان لحظه باشد

□ مثال:

$y[n] = x^2[n]$ $y(t) = x^2(t)$ □ سیستم بدون حافظه:

$y[n] = x[n-1]$ $y(t) = \int_{-\infty}^t x^2(t)$ □ سیستم حافظه دار:

H.R. POURREZA

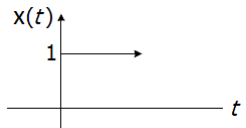


خصوصیات سیستم‌های پایدار

59

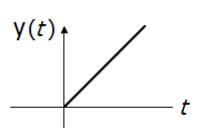
□ سیستمی پایدار است که به ازای ورودی محدود، خروجی محدود داشته باشد. به عبارتی دیگر، سیستمی پایدار است که در آن ورودی‌های کوچک، خروجی‌های واگرا ایجاد نکند.

□ مثال: سیستم ناپایدار $y(t) = \int_{-\infty}^t x(t)$



$x(t)$

→



$y(t)$

H.R. POURREZA